769. Bessel微分方程式ニ導カレル微分方程式

福原　満洲雄（九大）

Bessel微分方程式

$$(1) \quad \frac{d^2z}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)z=0$$

ニ於テ $y=xz'$ ト置ケバ

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x^2+n^2}{x^2-n^2}\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0$$

ヲ得ルガ，逆ニ或ル方程式，例ヘバ（2）ガ與ヘラレタトキ，コレガ Bessel 微分方程式（1）ヲ解クコトニ帰着サレルカ否カヲ判断スル一般的ナ方法ガアルカトイフコトガ伊藤誠氏ノ御質問ノ主意デハナイカト思フ、コノ小論ガ多少デモ御参考ニナレバ幸デアル。

1° Bessel微分方程式ノ特性．　ソノ特異点ハ $x=0$, ∞ ダケデアリ、前者ハ確定特異点，後者ハ不確定特異点デアル、$x=0$ ニ於ケル決定方程式ノ根ハ $\pm n$ デアル．$x=\infty$ ニ於テハ漸近的ニ

$$y \sim e^{\pm ix}x^{-\frac{1}{2}}[1+\cdots\cdots]$$

ト展開サレル解ガ存在スル．逆ニコレダケノ性質ヲ持ツ二階線型微分方程式ハ Bessel 微分方程式デアル。

2° 微分方程式（2）ノ特異点．　$x=0$，$\pm n$，∞ ダケデアッテ、0，$\pm n$ ハ確定特異点，∞ ハ不確定特異点デアル。

$x=0$ ニ於ケル決定方程式ノ根ハ Bessel 微分方程式ト同ジク $\pm n$ デアル、$x=n$ ニ於ケル決定方程式ノ根ハ 0, 2 デアル。0 ニ對應スル解ヲ求メテ見ルト

$$y=1+\frac{2}{3n}(x-n)^3+\cdots\cdots$$

デ對數項ハ現ハレナイ、n ヲ $-n$ デ置換ヘテモ方程式ノ形ハ變ラナイカラ $x=-n$ ニ於ケル決定方程式ノ根ハ 0, 2 デ 0 ニ對應スル解ハ

$$y=1-\frac{2}{3n}(x+n)^3+\cdots\cdots$$

デアル、$x=\infty$ ニ於テハ漸近的ニ

$$y\sim e^{\pm ix}x^{\frac{1}{2}}[1+\cdots\cdots]$$

ト展開サレル解ガ存在スル。

3° 微分方程式 (2) ガ Bessel 微分方程式 (1) ニ導カレル理由、$x=n$ ニ於テ (2) ハ二ツノ解

$$y=(x-n)^2+\cdots\cdots,\quad y=1+\frac{2}{3n}(x-n)^3+\cdots\cdots$$

ヲ持チ，ソレニ對シテ

$$y'=2(x-n)+\cdots\cdots,\quad y'=\frac{2}{n}(x-n)^2+\cdots\cdots$$

トナル、依ッテ $\varphi_1(x)$ ガ $x=n$ デ正則デ 0 トナラナイ函數ナラバ

$$z=\frac{\varphi_1(x)}{x-n}y'$$

ガ滿足スル微分方程式ハ二階線型デ，$x=n$ ヲ確定特異点ト

シテ持チ，ソコニ於ケル決定方程式ノ根ハ $0, 1$ デアル．而モ 0 ニ對應スル解ノ展開式中ニ對數項ハ現ハレナイ．

從ツテ $x=n$ ハ最早ヤ特異点デハナイ、$x=-n$ ニ於テモ同様デアルカラ、$\varphi(x)$ ガ $x=\pm n$ ニ於テ正則デ 0 トナラナイ函數ナラバ

$$z=\frac{\varphi(x)}{x^2-n^2}y'$$

ガ滿足スル微分方程式ハ二階線型デ，$x=\pm n$ ハ最早ヤ特異点デハナイ．

$x=0$ ニ於テ (2) ハ二ツノ解

$$y=x^n[1+\cdots\cdots],\quad y=x^{-n}[1+\cdots\cdots]$$

ヲ持ツ、コレニ對シテ

$$y'=nx^{n-1}[1+\cdots\cdots],\quad y'=-nx^{-n}[1+\cdots\cdots]$$

トナルカラ，$\psi_1(x)$ ガ $x=0$ デ 0 トナラナイ正則ナ函數ナラバ

$$z=x\psi_1(x)\,y'$$

ガ滿足スル微分方程式ハ $x=0$ ヲ確定特異点トシテ持チ，ソコニ於ケル決定方程式ノ根ハ $\pm n$ デアル。

$x=\infty$ ニ於テ漸近的ニ

$$y\sim e^{ix}\cdot x^{\frac{1}{2}}[1+\cdots\cdots],\quad y\sim e^{-ix}x^{\frac{1}{2}}[1+\cdots\cdots]$$

ト展開サレル解ニ對シテハ漸近的ニ

$$y'\sim e^{ix}x^{\frac{1}{2}}[i+\cdots\cdots],\quad y'\sim e^{-ix}x^{\frac{1}{2}}[-i+\cdots\cdots]$$

トナル。依ツテ $\psi_2(x)$ ガ $x=\infty$ ニ於テ正則デ 0 トナラナ

イ函数ナラバ

$$z = x^{-1} \mathscr{Y}_2(x)\, y'$$

ハ $x=\infty$ ニ於テ漸近的ニ

$$z \sim e^{ix} x^{-\frac{1}{2}} [1+\cdots\cdots],\quad z \sim e^{-ix} x^{-\frac{1}{2}} [1+\cdots\cdots]$$

ト展開サレル解ヲ持ツ。依ッテ

$$(3)\qquad z = \frac{x}{x^2-n^2}\, y'$$

ガ満足スル二階線型微分方程式ハ $0,\ \pm n,\ \infty$ ニ於イテ Bessel 微分方程式ノ特性ヲ満足シテヰル、ソレガ確カニ Bessel 微分方程式デアルタメニハ $0,\ \pm n,\ \infty$ 以外ニ特異点ヲ持タヌコトヲ確メオバナラナイ、$x_0 \neq 0,\ \pm n,\ \infty$ トスレバ $x = x_0$ ニ於テ (2) ハ

$$y = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n^2}{x_0^2}\right)(x-x_0)^2 + \cdots\cdots,$$

$$y = (x-x_0) + \cdots\cdots$$

ト展開サレル解ヲ持ツ、前者ノ $(x-x_0)^2$ ノ係数ハ 0 デナイカラ変換 (3) ニ依ッテ得ラレル微分方程式ハ $x = x_0$ ニ於テ

$$z = 1 + \cdots\cdots,\qquad z = (x-x_0) + \cdots\cdots$$

ト展開サレル解ヲ持ツ、依ッテ x_0 ハ特異点デハナイ。

以上デ変換(3)ヲ行ヘバ Bessel 微分方程式トナルコトガ証明サレタ。コノ変換ハ伊藤氏ガ示サレタ変換ト形ハ異ッテヰルガ本質的ニハ異ッタモノデハナイ、実際ニ (3) ヲ x デ微分シ，(2) ヲ使ヘバ容易ニ $xz' = -y$ ヲ得ル。

要スルニ限定サレタ範囲内ノ函数ヲ使ッテ一ツノ線型微分方程式カラ他ノ線型微分方程式ニ移リ得ルカ否カ、移リ得ルナラバソノ変換ヲ如何ニシテ求メルカトイフ問題ト確定特異点、不確定特異点ノ理論トノ関係ハ頗ル密接デアル。微分方程式論ノ書物ハカウ言ッタ問題相互間ノ関係ニハ言及シテ居ナイガ、我々ハ各種ノ問題相互ノ関聯ニモット注意ヲ拂フベキデアラウ。ソレヲ怠ル結果ハ理論ト応用ノ分離的傾向ヲ助長シ、学問全体トシテノ健全ナ発展ヲ阻害スルノデハナイカト思フ。